

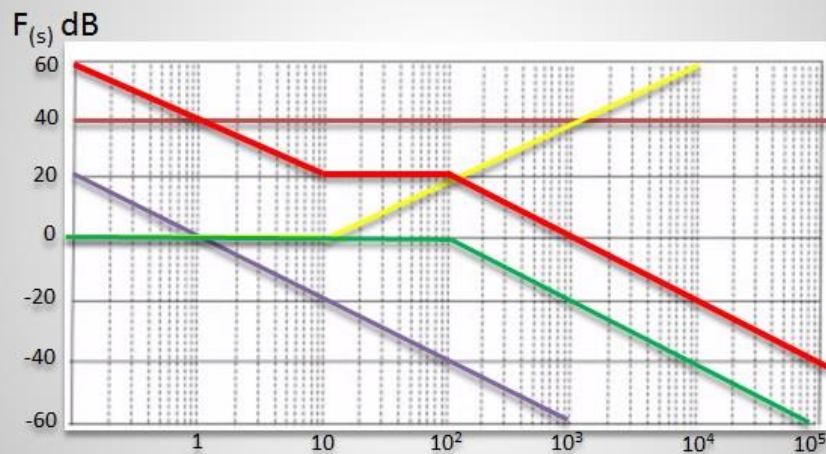
Bode-Diagramme

in der

Elektrotechnik

ohne Ballast

$$F(s) = 100 \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{s}{10}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$



Vom Frequenzgang
zum Bode-Diagramm

VIDEO-unterstützt

Bode-Diagramme in der Elektrotechnik

ohne Ballast

von

Wolfgang Bengfort –ET-Akademie.de / ET-Tutorials.de

Elektrotechnik verstehen durch VIDEO-Tutorials

Rechtlicher Hinweis:

Alle Rechte vorbehalten.

Dieses Buch darf ohne Genehmigung des Autors in keiner Form, auch nicht teilweise, vervielfältigt werden.

Texte und Bilder Copyright ©2015

Impressum

Wolfgang Bengfort
Kinderhauser Straße 91
48147 Münster

Vorwort

Zur Analyse und zum Aufbau von Systemen in der Nachrichten- und Regelungstechnik ist neben dem Zeitverhalten vor allem das Frequenzverhalten von großer Bedeutung.

Ein für den Techniker wichtiges Werkzeug ist dabei die Verwendung von Bode-Diagrammen, mit deren Hilfe auch komplexe Systeme beschrieben werden können.

Das Verhalten wird häufig durch Funktionen beschrieben. Diese Funktionen beschreiben das Verhalten der Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Eingangsspannung.

In Wechselstromkreisen ist hier das Verhalten der Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Frequenz der (sinusförmigen) Eingangsspannung interessant.

Da die Ausgangsspannung durch den Wechselstromkreis sowohl in der Amplitude als auch im Phasenwinkel von der Eingangsspannung abweicht, wird das Verhalten durch eine komplexe Funktion beschrieben.

Komplex bedeutet hier nicht, dass die Funktion kompliziert ist, sondern im mathematischen Sinne komplex. Es werden also komplexe Zahlen zur Beschreibung der Funktion verwendet.

Ziel des vorliegenden Buches **Bode-Diagramme in der Elektrotechnik** ist es, den Studierenden eine Einführung in das Thema zu geben und bei dem **Verständnis und der Anwendung von Bode-Diagrammen** punktgenau zu unterstützen – **ohne Ballast**.

Das Buch erläutert zunächst Schritt für Schritt die mathematischen Grundlagen von Bode-Diagrammen. Hierbei wird insbesondere auf das Verständnis der Zusammenhänge Wert gelegt.

Anschließend wird anhand von **konkreten Beispielen** die Anwendung von Bode-Diagrammen in der Elektrotechnik erläutert.

Die Beispiele werden in speziellen **Online-Videos** für die Leser dieses Buches veranschaulicht.

Das vorliegende Buch setzt grundlegende Kenntnisse der komplexen Zahlen voraus, wie Sie zu Beginn des Elektrotechnik-Studiums vermittelt werden.

Zur Auffrischung zum Thema „Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik“ empfehle ich meinen [gleichnamigen VIDEO-Kurs](#), das ebenfalls bei Amazon erhältlich ist.

Münster, Mai 2015

Wolfgang Bengfort

Inhaltsangabe

Vorwort

Was ist ein Bode-Diagramm

Der Frequenzgang

Amplitudengang

Phasengang

Ein Beispiel

Amplitudengang

Phasengang

Grenzfrequenz

Graphische Darstellung des Bode-Diagramms

Darstellung des Amplitudengangs in Dezibel (dB)

Graphische Darstellung des Bode-Diagramms für einen RC-Tiefpass

Vereinfachte Darstellung von Amplitudengang und Phasengang

Weitere typische Übertragungsglieder

P-Glied

D-Glied

Verwendung einer normierten Darstellung

I-Glied

PD-Glied

Übersicht der elementaren Übertragungsglieder

Laplace-Transformation für die Darstellung der Übertragungsglieder

Die Arbeit mit Bode-Diagrammen

Analyse des Amplitudengangs im Bode-Diagramm

Analyse des Phasengangs im Bode-Diagramm

Beispiel zur Arbeit mit Bode-Diagrammen

Ermittlung des Phasengangs

Übungsaufgabe zum Bode-Diagramm

Was ist ein Bode-Diagramm

In einem Bode-Diagramm wird das Verhalten einer Schaltung in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt.

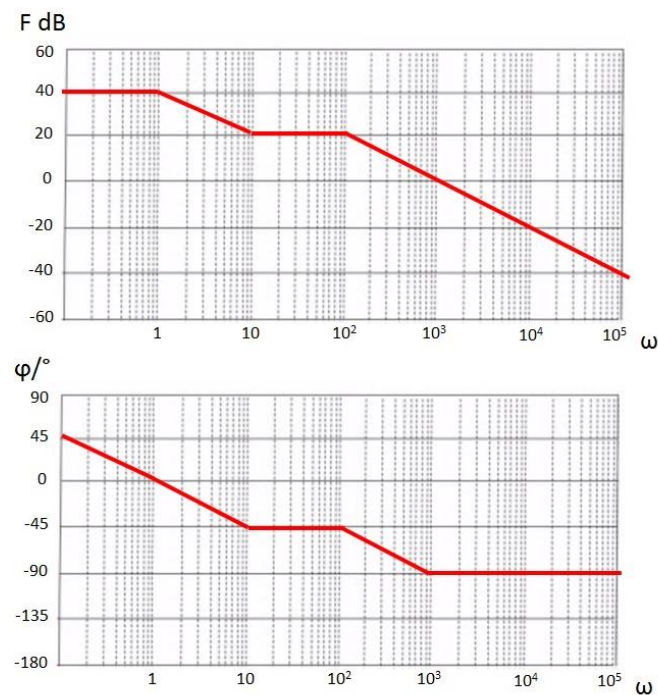
Und zwar in zwei Darstellungen, eine für das **Amplitudenverhältnis** und eine für die **Phasenverschiebung** zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung.

Die Frequenzachse, also die „x-Achse“, wird hierbei logarithmisch (dazu später mehr) dargestellt.

Das Amplitudenverhältnis in dB (Dezibel, auch dazu später mehr).

Man erhält im Bode-Diagramm also eine graphische Darstellung, in der sich das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung in Abhängigkeit von der Frequenz ω ablesen lässt.

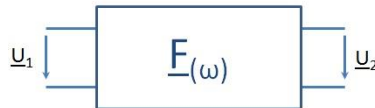
Ein Beispiel für ein Bode-Diagramm:



Und nun der Weg dorthin.

Der Frequenzgang

Im allgemeinen Fall lässt sich das Verhältnis aus Ausgangsspannung und Eingangsspannung eines Übertragungssystems durch den (komplexen) **Frequenzgang $\underline{F}(\omega)$** beschreiben.



Bei einer Eingangsspannung

$$\underline{U}_1 = U_1 \cdot e^{j\varphi_1}$$

und einer Ausgangsspannung

$$\underline{U}_2 = U_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

lässt sich der Frequenzgang $\underline{F}(\omega)$ als das Verhältnis von Ausgangsspannung zur Eingangsspannung angeben:

$$\underline{F}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{U_2 \cdot e^{j\varphi_2}}{U_1 \cdot e^{j\varphi_1}}$$

Wie wir gleich an einem Beispiel sehen werden, sind Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung abhängig von der Frequenz.

An der Gleichung lässt sich aber schon erkennen, dass im Frequenzgang sowohl die Information über das Amplitudenverhältnis (U_2/U_1) als auch zur Phasenverschiebung $\varphi_2 - \varphi_1$ enthalten ist.

Zur Erstellung des Bode-Diagramms werden diese beiden **Information getrennt** benötigt.

Hierzu müssen die Informationen über das Verhältnis der Amplituden und der Verlauf der Phasenverschiebung aus dem Frequenzgang extrahiert werden.

Diese Teile werden als Amplitudengang und Phasengang bezeichnet.

Amplitudengang

Zur Bildung des Amplitudengangs $F_{(\omega)}$ wird nur der **Betrag** des Frequenzganges $\underline{F}_{(\omega)}$ berücksichtigt.

$$F_{(\omega)} = |\underline{F}_{(\omega)}| = \left| \frac{U_2 \cdot e^{j\varphi_2}}{U_1 \cdot e^{j\varphi_1}} \right| = \frac{U_2}{U_1}$$

Der Amplitudengang errechnet sich also aus „Betrag des Zählers geteilt durch Betrag des Nenners“.

Dies wird weiter unter für die Berechnung an konkreten Beispielen verwendet.

Phasengang

Der Phasengang $\varphi_{(\omega)}$ beschreibt die Phasenverschiebung zwischen Ausgangs- und Eingangsspannung.

Aus dem Frequenzgang erhält man den Phasengang aus:

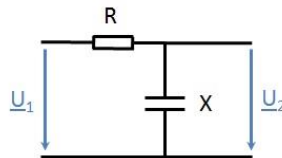
$$\varphi_{(\omega)} = \angle(\underline{F}_{(\omega)}) = \angle\left(\frac{U_2 \cdot e^{j\varphi_2}}{U_1 \cdot e^{j\varphi_1}}\right) = \varphi_2 - \varphi_1$$

Der Phasengang errechnet sich also aus „Winkel des Zählers minus Winkel des Nenners“.

Auch das wird weiter unter für die Berechnung an konkreten Beispielen verwendet.

Ein Beispiel

Am Beispiel eines einfachen RC-Tiefpasses wird dies im Folgenden gezeigt werden.



Das Verhältnis aus Ausgangsspannung \underline{U}_2 und Eingangsspannung \underline{U}_1 lässt sich über einen komplexen Spannungsteiler berechnen (In einer Reihenschaltung verhalten sich die Spannungen wie die Widerstände).

$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{X}_C}{R + \underline{X}_C}$$

Da \underline{X}_C von ω abhängig ist ($\underline{X}_C = 1/j \omega C$) ist der Frequenzgang $\underline{F}_{(\omega)}$ eine Funktion von ω . Da die Funktion komplexe Werte ausweist wird $\underline{F}_{(\omega)}$ mit einem Unterstrich geschrieben.

Die kapazitive Impedanz eingesetzt in den Frequenzgang ergibt:

$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{\underline{X}_C}{R + \underline{X}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Hinweis: Im letzten Schritt wurden Zähler und Nennen mit $j\omega C$ multipliziert. So sieht die Funktion etwas ansehnlicher aus.

Der Frequenzgang ergibt also abhängig von der Frequenz einen komplexen Wert.

Dieser komplexe Wert ändert sich, abhängig von der Frequenz, sowohl im Betrag als auch im Phasenwinkel.

Im Amplitudengang und Phasengang wird dieses Verhalten für den Betrag bzw. den Phasengang ausgedrückt.

Im Folgenden wird dies für den RC-Tiefpass untersucht.

Amplitudengang

Der Frequenzgang des RC-Tiefpasses lautet also wie eben gezeigt:

$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Für den Amplitudengang ist nun der Betrag der Funktion gesucht.

$$|F_{(\omega)}| = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right|$$

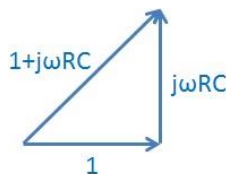
Der Term auf der rechten Seite ist ein Bruch.

Der Betrag eines komplexen Bruches ist gleich dem Betrag des Zählers geteilt durch den Betrag des Nenners. Da der Betrag des Zählers 1 ist, muss nur noch der Betrag des Nenners ermittelt werden.

Wir betrachten also den Nenner.

$$1 + j\omega RC$$

In der komplexen Ebene sieht der Nenner folgendermaßen aus:



Also ein Zeiger mit dem Realteil 1 und dem frequenzabhängigen Imaginärteil $j\omega RC$.

Der Betrag lässt sich mit Hilfe des Satz des Pythagoras berechnen.

$$|1 + j\omega RC| = \sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}$$

Da diese Berechnung für den Nenner-Term gilt, ergibt sich somit für den Amplitudengang

$$F_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}$$

Phasengang

Für den Phasengang ist nun der Phasenwinkel des Frequenzgangs gesucht.

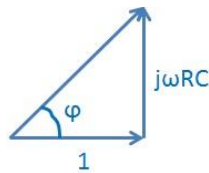
Also

$$\angle F_{(\omega)} = \angle\left(\frac{1}{1 + j\omega RC}\right)$$

Der Winkel des Quotienten zweier komplexer Zahlen ist gleich dem Winkel des Zählers **minus** Winkel des Nenners.

Im Zähler steht die reelle Zahl 1, der Winkel des Zählers beträgt also 0.

Zur Berechnung des Winkels des Nenners wird wieder das Zeigerdiagramm herangezogen.



Für den Winkel φ gilt:

$$\tan \varphi = \frac{\omega RC}{1} \Rightarrow \varphi = \arctan \omega RC$$

Da der Winkel der komplexen Funktion gleich dem Winkel des Zählers minus dem Winkel des Nenners ist, ergibt sich für den Phasengang $\varphi(\omega)$:

$$\varphi_{(\omega)} = 0 - \arctan \omega RC = -\arctan \omega RC$$

Grenzfrequenz

Zurück zum Amplitudengang des RC-Tiefpasses.

$$F_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}$$

Da die Frequenz ω im Nenner des Amplitudengangs steht, wird das Verhältnis von Ausgangsspannung zur Eingangsspannung mit steigender Frequenz immer kleiner.

Da der Amplitudengang jedoch stetig fällt, es also keine Frequenz gibt, bei der der Amplitudengang abrupt fällt, wird eine Grenzfrequenz definiert, die den Tiefpass charakterisiert.

Die Grenzfrequenz ist die Frequenz ω_0 , bei der die Ausgangsspannung auf den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,7\%$$

der Eingangsspannung gesunken ist.

An der hergeleiteten Funktion des Amplitudengangs

$$F_{(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}$$

ist zu erkennen, dass unter der Wurzel im Nenner genau dann eine 2 steht, wenn für die Grenzfrequenz ω_g

$$(\omega_g RC)^2 = 1$$

ist.

Umgeformt nach ω_0 ergibt das:

$$\omega_g = \frac{1}{RC} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot RC}$$

Bei einer Grenzfrequenz $\omega_g = 1/RC$ ist die Ausgangsspannung um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,7\% \text{ kleiner als die Eingangsspannung.}$$

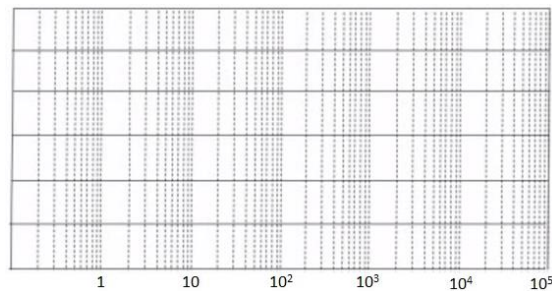
Graphische Darstellung des Bode-Diagramms

Im allgemeinen werden die Achsen von Diagrammen mit linearen Achsen versehen. Der Abstand zwischen 10Hz und 20Hz ist dann beispielsweise genau so groß wie der Abstand zwischen 10010Hz und 10020Hz.

Der Nachteil dieser linearen Einteilung besteht darin, dass bei einem Zahlenbereich, der sich über mehrere Zehnerpotenzen erstreckt, der untere Bereich nicht mehr genau abgelesen werden kann.

Abhilfe schafft hier die logarithmische Darstellung der x-Achse.

Bei der logarithmischen Darstellung wird jeder Dekade der gleiche Platz zur Verfügung gestellt. Der Abstand zwischen 1Hz und 10Hz ist dann genau so groß wie der Abstand zwischen 10Hz und 100Hz, bzw. zwischen 100Hz und 1.000Hz.



So wird gewährleistet, dass für kleinere Frequenzen Amplitudengang und Phasengang noch gut dargestellt werden können, gleichzeitig aber auch eine Darstellung für größere Frequenzen möglich ist.

Darstellung des Amplitudengangs in Dezibel (dB)

Auf der y-Achse wird der Amplitudengang üblicherweise ebenfalls in einem logarithmischen Maß aufgetragen, dem Dezibel (dB).

Für Spannungssignale ist die Verstärkung bzw. das Dämpfungsmaß definiert als

$$a = 20 \cdot \log \frac{U_a}{U_e}$$

Zur Berechnung wird also neben dem Logarithmus aus dem Verhältnis aus Ausgangsspannung zur Eingangsspannung noch ein Faktor 20 hinzugefügt.

Dieser Faktor wird verwendet um handlichere Größen zu erreichen.

Anmerkung: Bei der Betrachtung von Leistungen wird im übrigen der Faktor 10 verwendet. Daher kommt der Name Dezibel, ein zehntel Bel.

Die Darstellung des Amplitudengangs in Dezibel hat mehrere Vorteile, die wir später in Beispielen noch intensiv verwenden werden.

1. Der in Dezibel dargestellte Amplitudengang ist in vielen Schaltungen in weiten Bereichen linear (z.B. 20dB/Dekade). Die Darstellung ergibt also eine Gerade, die sich leicht konstruieren lässt.
2. Durch den Logarithmus wird eine Multiplikation zweier Frequenzgänge, die sich aus der Reihenschaltung zweier Verstärker ergibt, zur Addition.

Eine Erklärung hierzu.

Multipliziert man zwei Funktionen

$$F(\omega) = G(\omega) \cdot H(\omega)$$

so ergibt sich bei einer logarithmischen Darstellung der Funktionen nach dem Logarithmengesetzen

$$\log F(\omega) = \log(G(\omega) \cdot H(\omega)) = \log G(\omega) + \log H(\omega)$$

eine Addition der logarithmischen Darstellungen der Funktionen.

Dies ist vor allem bei der graphischen Analyse von mehreren Übertragungsgliedern, wie weiter unten in den Beispielen gezeigt sehr handlich.

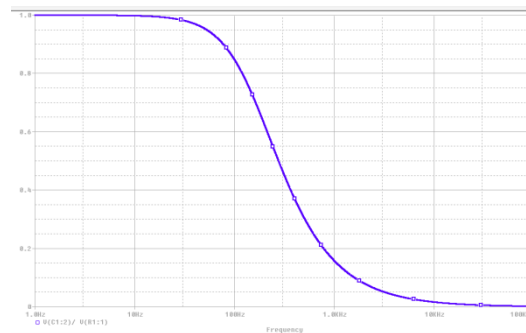
Graphische Darstellung des Bode-Diagramms für einen RC-Tiefpass

In folgendem Beispiel wird das Bode-Diagramm für einen Tiefpass mit $R=1k\Omega$ und $C=1\mu F$ erstellt.

Wie bereits oben hergeleitet lässt sich der Amplitudengang wie für einen RC-Tiefpass wie folgt beschreiben.

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}}$$

Für den Amplitudengang mit linear skaliertem y-Achse ergibt sich folgender Verlauf.



Diese Darstellung erhält man durch die Berechnung der einzelnen Wertepaare des Amplitudengangs, mit Hilfe eines Funktionenplotters oder durch die Simulation mit Hilfe eines Programms für Elektroniksimulationen

Bei der Grenzfrequenz

$$f_g = \frac{1}{2\pi \cdot RC} = 159 \text{ Hz}$$

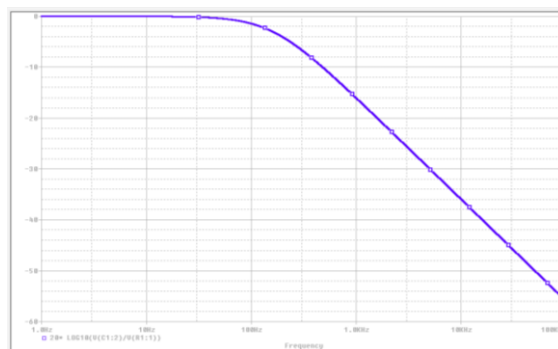
beträgt der Amplitudengang wie erwartet

$$F(f_g) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70,7\%$$

Das Dämpfungsmaß (in Dezibel) beträgt

$$a = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} \right)$$

Die Darstellung in Dezibel sieht wie folgt aus.



Man erkennt bei der Grenzfrequenz $f_g=159\text{Hz}$ eine Dämpfung von -3dB .

Das lässt sich auch durch folgende Rechnung verifizieren:

$$a = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(2\pi \cdot 159 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1\text{k}\Omega \cdot 1\mu\text{F}\right)^2}} \right) = -3\text{dB}$$

Im weiteren Verlauf fällt die Kennlinie **linear um 20dB/Dekade** ab.

Übertragungsglieder wie dieser Tiefpass werden auch Verzögerungsglieder 1. Ordnung genannt.

In der Literatur findet man auch Bezeichnungen wie VZ1- oder PT1- Glied.

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Die Ordnung beschreibt die Anzahl der Zeitkonstanten dieses Übertragungsgliedes. Diese Übertragungsfunktion hat eine Zeitkonstante (RC).

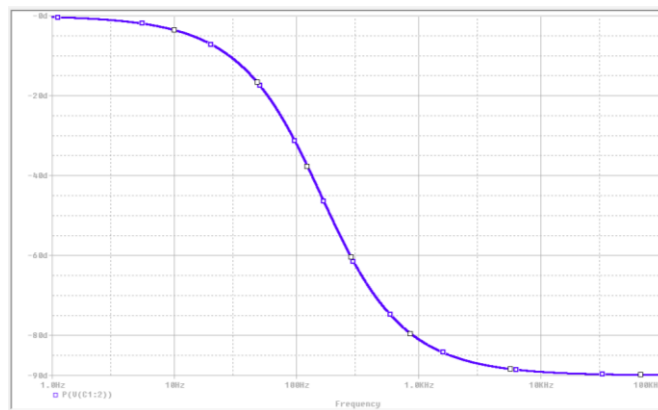
Allgemein setzt man für die Zeitkonstante $RC = T$, so dass sich für den Frequenzgang eines Übertragungsgliedes.

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

ergibt.

Die Grenz(kreis)frequenz ω_g beträgt für diesen allgemeinen Fall $\omega_g=1/T$.

Entsprechend lässt sich der **Phasengang** des RC-Tiefpasses darstellen.



Für kleine Frequenzen beträgt der Phasengang 0, für hohe Frequenzen -90° , d.h. die Ausgangsspannung eilt der Eingangsspannung vom 90° nach.

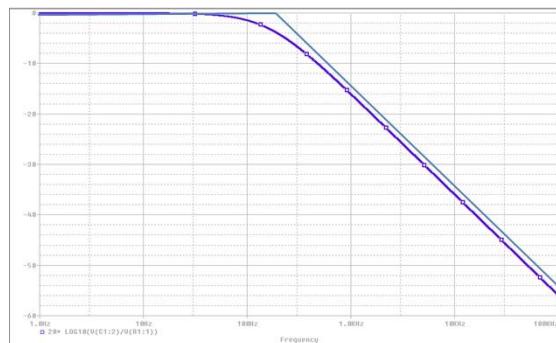
Bei der Grenzfrequenz $\omega_g=1/T$ beträgt der Phasengang -45° .

Vereinfachte Darstellung von Amplitudengang und Phasengang

Für die graphische Analyse und Synthese von Übertragungsgliedern wird der Amplitudengang vereinfacht dargestellt.

Eine sehr einfache Annäherung an den realen Amplitudengang ist die Darstellung mit einer konstanten Verstärkung von **0dB bis zur Grenzfrequenz** und anschließend einen konstanten **Abfall von 20dB/Dekade**.

In der folgenden Darstellung sieht man die gute Annäherung für tiefer und hohe Frequenzen, aber auch die Abweichung im Bereich der Grenzfrequenz.



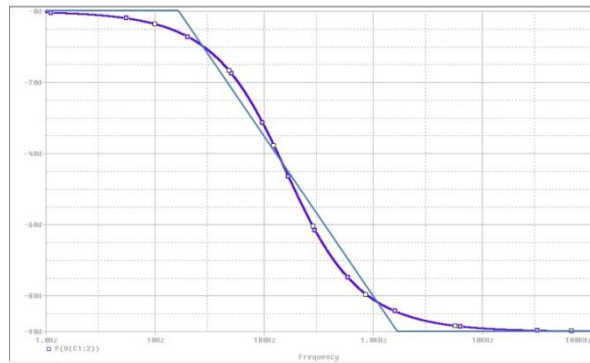
Auch der Phasengang wird in der graphischen Annäherung vereinfacht dargestellt.

In guter Näherung kann man davon ausgehen, dass der Übergang zwischen 0° und -90° innerhalb von 2 Dekaden vor sich geht.

Der Phasengang ist also

- 0 bis zur Frequenz eine Dekade vor der Grenzfrequenz,
- fällt dann linear um 90° bis zur Frequenz eine Dekade nach der Grenzfrequenz und
- beträgt anschließend -90° .

In folgendem Diagramm ist diese Annäherung dargestellt.



Für ein VZ1-Glied gilt also:

Der Amplitudengang ist bis zur Grenzfrequenz 0 und fällt dann mit 20dB/Dekade.

Der Phasengang ist für kleine Frequenzen 0 und für große Frequenzen -90° . Der Übergang wird über insgesamt 2 Dekaden symmetrisch zur Grenzfrequenz vollzogen.

Weitere typische Übertragungsglieder

Komplexere Übertragungssysteme lassen sich häufig auf eine Zusammenschaltung elementarer Übertragungsglieder zurückführen.

Im Folgenden geht es daher zunächst um weitere wichtige Übertragungsglieder. Diese sind

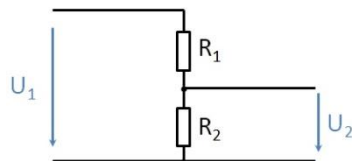
- P-Glied
- I-Glied
- D-Glied
- PD-Glied.

Nach der Untersuchung dieser elementaren Übertragungsglieder werden anschließend diese Übertragungsglieder zu komplexeren Systemen zusammengebaut.

P-Glied

Das P-Glied (Proportionalglied) ist das einfachste Übertragungsglied. Zur Bildung der Ausgangsspannung wird die Eingangsspannung mit einem konstanten Faktor k multipliziert.

Ein einfaches Beispiel für ein Übertragungsglied mit einem Faktor $k < 1$ ist ein Spannungsteiler.



Die Übertragungsfunktion (der Frequenzgang) ist in diesem Beispiel nach der Spannungsteiler-Regel

$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = K$$

also eine Konstante K .

Das Dämpfungsmaß ist somit konstant

$$a = 20 \cdot \log |K|$$

Bei einer Realisierung eines P-Gliedes durch eine Operationsverstärkerschaltung kann diese Konstante K auch negativ sein.

Ein eventueller negativer Faktor K wird jedoch nicht im Dämpfungsmaß, sondern in der Phasenverschiebung berücksichtigt.

Bei positivem K besteht keine Phasenverschiebung zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung. Der Frequenzgang ist dann also

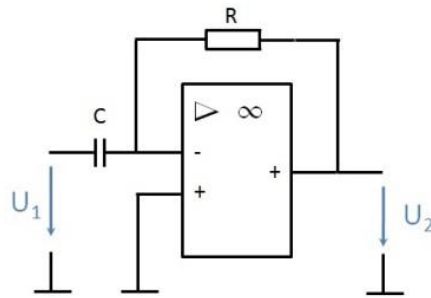
$$\varphi(\omega) = 0$$

Bei negativem K beträgt die Phasenverschiebung zwischen Ausgangsspannung und Eingangsspannung

$$\varphi(\omega) = 180^\circ = -180^\circ$$

D-Glied

Das D-Glied differenziert das Eingangssignal, bildet also die mathematische Ableitung. Eine elektrotechnische Realisierung ist mit folgender Operationsverstärkerschaltung möglich, bei der durch einen zusätzlichen (nachgeschalteten, hier nicht abgebildeten) invertierenden Verstärker das negative Vorzeichen aufgehoben wird.



In meinem E-Book zum Thema Operationsverstärker findet man ausführlichere Beschreibungen zur Berechnung von Übertragungsfunktionen von Operationsverstärkerschaltungen.

Da in diesem Buch der Schwerpunkt auf die Konstruktion von Bode-Diagrammen liegt, wird im Folgenden die Übertragungsfunktion des D-Gliedes nur kurz hergeleitet.

Für invertierende Operationsverstärkerschaltungen mit einem Eingangswiderstand \underline{Z}_1 und einem Rückkopplungswiderstand \underline{Z}_2 kann man den Frequenzgang $\underline{F}(\omega)$ mit der Formel

$\underline{F}(\omega) = \text{„- Rückkopplungswiderstand/Eingangswiderstand“}$

bestimmen.

Also:

$$\underline{F}(\omega) = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

Durch weitere Beschaltungen, beispielsweise durch einen zusätzlichen invertierenden Verstärker, wird das negative Vorzeichen aufgehoben, so dass sich folgender Frequenzgang ergibt:

$$\underline{F}(\omega) = \frac{R}{\underline{X}_C} = j\omega RC = \frac{j\omega}{\omega_g}$$

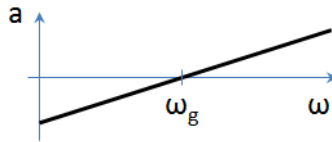
(mit $\omega_g=1/RC$)

Der Amplitudengang, also der Betrag von $F(\omega)$, setzt sich aus dem D-Glied also aus dem konstanten Faktor $1/\omega_g=RC$ und dem frequenzabhängigen Anteil ω zusammen.

Mit

$$a = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$

erhält man ein Dämpfungsmaß, das mit 20dB/Dekade ansteigt und bei ω_g den Wert 0dB besitzt.



Verwendung einer normierten Darstellung

Häufig findet man für D- und I-Glieder eine normierte Darstellung, bei der die Grenzfrequenz auf den Wert 1 bezogen wird um die Darstellung unabhängig von der Grenzfrequenz zu realisieren. Der Wert der Grenzfrequenz muss dann als konstante Verstärkung berücksichtigt werden.

Insbesondere bei der Nutzung der Laplace-Transformation (siehe weiter unten) arbeitet man mit einer normierten Darstellung.

Die Bildung einer normierten Darstellung wird im Folgenden an einem Beispiel gezeigt.

Das Bode-Diagramm eines D-Gliedes mit einer Grenzfrequenz $\omega_g = 100$ Hz hat bei ω_g die Verstärkung 0dB und steigt mit 20dB pro Dekade an.

Für die Bildung einer normierten Darstellung wird der Wert der Grenzfrequenz als Faktor interpretiert:

$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{j\omega}{\omega_g} \Leftrightarrow \underline{F}_{(\omega)} = \frac{1}{\omega_g} \cdot j\omega$$

Diese Form kann nun als Kombination zweier Übertragungsglieder beschrieben werden.

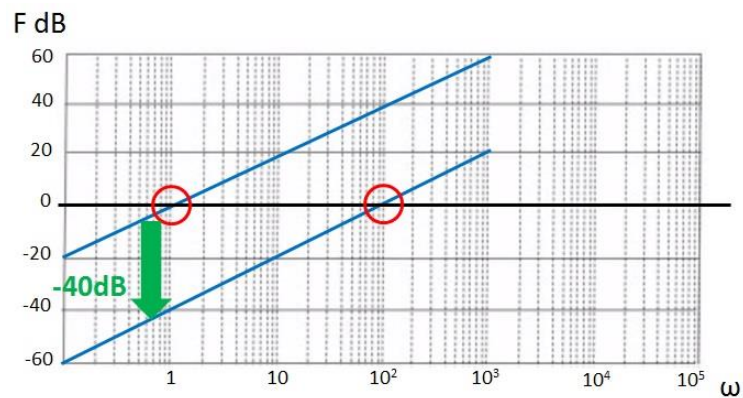
Zum einen ein normiertes D-Glied (mit dem Wert 0dB bei 1) und zum zweiten ein zusätzlicher Faktor mit (in diesem Beispiel) 1/100,

bzw. in der logarithmischen Darstellung in dB:

$$a = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{100}\right) = -40dB$$

Von der Darstellung des normierten Bode-Diagramms des D-Gliedes muss also von jedem Wert -40dB abgezogen werden.

Dies entspricht einer Verschiebung der normierten Darstellung um 40dB „nach unten“. Im folgenden Diagramm ist zu erkennen, dass sich wie erwartet die gleiche Darstellung ergibt.



Berechnung des Frequenzgangs des D-Gliedes

Da der Frequenzgang

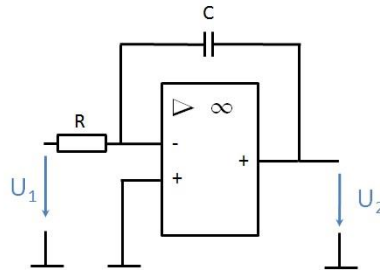
$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{j\omega}{\omega_g}$$

keinen Realteil besitzt ist der Phasengang konstant

$$\varphi_{(\omega)} = 90^\circ$$

I-Glied

Das I-Glied integriert das Eingangssignal. Eine elektrotechnische Realisierung ist mit folgender Operationsverstärkerschaltung möglich. Auch hier wird ein negatives Vorzeichen durch zusätzliche Beschaltung aufgehoben.



Es ergibt sich also auch hier wieder mit der Formel

$F(\omega) = \text{„- Rückkopplungswiderstand/Eingangswiderstand“}$

folgender Frequenzgang:

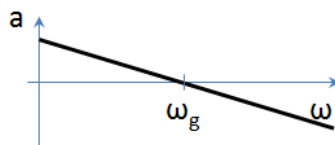
$$F_{(\omega)} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{j\omega RC} = \frac{1}{\omega_g}$$

Der Amplitudengang, also der Betrag von $F(\omega)$ setzt sich aus dem konstanten Faktor $1/\omega=RC$ und dem frequenzabhängigen Anteil $1/\omega$ zusammen.

Mit

$$a = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)} \right)$$

erhält man ein Dämpfungsmaß, das bei $\omega = \omega_g$ den Wert **0dB** besitzt und mit **20dB/Dekade** fällt.



Auch hier lässt sich analog zum D-Glied das Bode-Diagramm ebenfalls über die normierte Darstellung ermitteln.

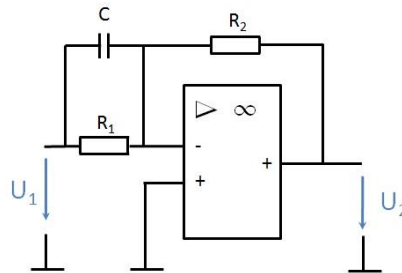
Da der Frequenzgang keinen Realteil besitzt ist der Phasengang konstant

$$\varphi_{(\omega)} = -90^\circ$$

denn $1/j = -j$

PD-Glied

Das PD-Glied wird häufig in Regelkreisen eingesetzt. Eine elektrotechnische Realisierung ist mit folgender Operationsverstärkerschaltung möglich. Auch hier wird das negative Vorzeichen durch weitere Beschaltung wieder aufgehoben.



Der Frequenzgang $F(\omega)$ der Operationsverstärkerschaltung lässt sich wiederum über

$$\underline{F}(\omega) = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$$

bestimmen.

Für die oben angegebene Schaltung gilt

$$\underline{Z}_2 = R_2$$

und

$$\underline{Z}_1 = R_1 \parallel \underline{X}_C = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}}$$

Somit ergibt sich für $\underline{F}(\omega)$ (die Aufhebung des negativen Vorzeichens bereits berücksichtigt)

$$\underline{F}_{(\omega)} = \frac{R_2}{\underline{Z}_1} = \frac{R_2 \cdot \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2 \cdot (j\omega C R_1 + 1)}{R_1}$$

Mit

$$\frac{R_2}{R_1} = k$$

als konstanter Faktor und

$$C R_1 = T$$

als Zeitkonstante

bleibt für den Frequenzgang eines PD-Gliedes

$$\underline{F}_{(\omega)} = k \cdot (j\omega T + 1)$$

Bzw. für den vereinfachten Fall $R_1=R_2$

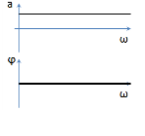
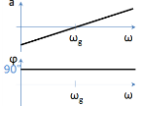
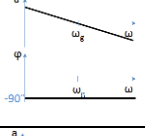
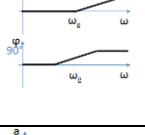
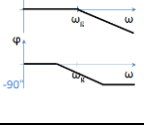
$$\underline{F}_{(\omega)} = j\omega T + 1$$

Der Amplitudengang ist bis zur Grenzfrequenz ($\omega_g=1/T$) 0 und **steigt** dann mit 20dB/Dekade.

Der Phasengang ist für kleine Frequenzen 0 und für große Frequenzen +90°. Der Übergang wird auch hier über insgesamt 2 Dekaden symmetrisch zur Grenzfrequenz vollzogen.

Übersicht der elementaren Übertragungsglieder

In der folgenden Tabelle sind die betrachteten Übertragungsglieder in einer Übersicht dargestellt.

Bezeichnung	Frequenzgang	Amplitudengang	Phasengang	Bode-Diagramm
P-Glied	K	$20 \cdot \log K $	0 für $K > 0$ -180° für $K < 0$	
D-Glied	$\frac{j\omega}{\omega_g}$	0 bei ω_g +20dB/Dekade	90°	
I-Glied	$\frac{1}{j\omega \omega_g}$	0 bei ω_g -20dB/Dekade	-90°	
PD-Glied	$\frac{j\omega}{\omega_g} + 1$	0 bis ω_g dann +20dB/Dekade	0 bis eine Dekade vor ω_g +45° bei ω_g +90° bis eine Dekade nach ω_g	
PT1-Glied (VZ1-Glied)	$\frac{1}{\frac{j\omega}{\omega_g} + 1}$	0 bis ω_g dann -20dB/Dekade	0 bis eine Dekade vor ω_g -45° bei ω_g -90° bis eine Dekade nach ω_g	

Laplace-Transformation für die Darstellung der Übertragungsglieder

In der einzelnen Disziplinen der Elektrotechnik werden unterschiedliche Darstellungsformen für Übertragungsglieder verwendet. Stabile Übertragungssysteme lassen sich beispielsweise mit Hilfe der Laplace-Transformation beschreiben. Diese Darstellung ist in der Regelungstechnik üblich.

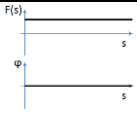
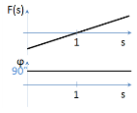
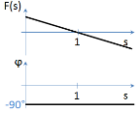
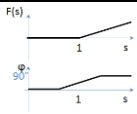
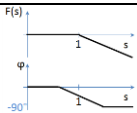
Eine Beschreibung der Laplace-Transformation würde den Rahmen dieses Buches sprengen. Daher möchte ich an dieser Stelle für ein tieferes Verständnis der Laplace-Transformation auf die umfangreiche Literatur zu diesem Thema verweisen.

Da in den Hochschulen Bode-Diagramme meist im Zusammenhang mit der Regelungstechnik angewendet wird und somit Aufgabenstellungen in Form der Laplace-Transformierten formuliert sind, wird im Folgenden bei den Beispielaufgaben ebenfalls diese Form verwendet.

Sehr stark vereinfacht kann man an dieser Stelle sagen, dass man die Laplace-Transformierte von stabilen Übertragungsgliedern erhält, indem man für Übertragungsfunktionen die komplexe Kreisfrequenz $j\omega$ durch die Variable s ersetzt.

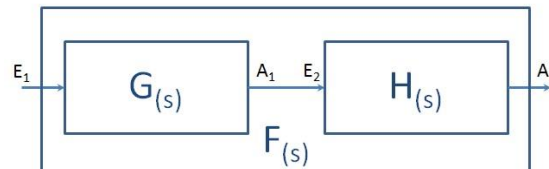
$$j\omega = s$$

Für die praktische Arbeit mit Bode-Diagrammen ändert sich die Tabelle somit in folgende Form:

Bezeichnung	Übertragungsfunktion	Amplitudengang	Phasengang	Bode-Diagramm
P-Glied	K	$20 \cdot \log K $	0 für $K > 0$ -180° für $K < 0$	
D-Glied	s	0 bei 1 +20dB/Dekade	90°	
I-Glied	$\frac{1}{s}$	0 bei 1 -20dB/Dekade	-90°	
PD-Glied	$\frac{s}{a} + 1$	0 bis a dann +20dB/Dekade	0 bis eine Dekade vor a +45° bei 1 +90° bis eine Dekade nach 1	
PT1-Glied (VZ1-Glied)	$\frac{1}{\frac{s}{a} + 1}$	0 bis a dann -20dB/Dekade	0 bis eine Dekade vor a -45° bei 1 -90° bis eine Dekade nach 1	

Die Arbeit mit Bode-Diagrammen

Bode-Diagramme werden zur Analyse komplexer Systeme eingesetzt. Diese Systeme bestehen aus einzelnen hintereinander geschalteten Übertragungsgliedern.



Ein Eingangssignal $\underline{E}_1(s)$ wird in diesem Beispiel in das erste System eingespeist. Dieses System bildet das Ausgangssignal $\underline{A}_1(s)$ durch die Multiplikation von $\underline{E}_1(s)$ mit $\underline{G}(s)$.

Das Ausgangssignal $\underline{A}_1(s)$ ist gleichzeitig das Eingangssignal $\underline{E}_2(s)$ für das folgende Übertragungsglied, das durch eine Multiplikation mit $\underline{H}(s)$ das Ausgangssignal $\underline{A}_2(s)$ des Gesamtsystems bildet.

Analyse des Amplitudengangs im Bode-Diagramm

Für den Amplitudengang (die Verstärkung) ergibt sich somit

$$A_1(s) = E(s) \cdot G(s)$$

Durch die Hintereinanderschaltung der Übertragungssysteme G und H entspricht das Ausgangssignal von G, also $A_1(s)$, dem Eingangssignal von H, also $E_2(s)$.

Das Ausgangssignal des Gesamtsystems wird gebildet aus

$$A_2(s) = E_2(s) \cdot H(s) = A_1(s) \cdot H(s) = E_1(s) \cdot G(s) \cdot H(s)$$

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ist demnach

$$F(s) = \frac{A_2(s)}{E_1(s)} = G(s) \cdot H(s)$$

also eine Multiplikation der einzelnen Übertragungsfunktionen.

Für den Amplitudengang, der im Bode-Diagramm in Dezibel (also logarithmisch) dargestellt ist, wird aus der Multiplikation von $G(s)$ und $H(s)$ eine Addition der logarithmischen Darstellung, denn

$$\log F(s) = \log(G(s) \cdot H(s)) = \log G(s) + \log H(s)$$

Dieser Umstand macht das Arbeiten mit Bode-Diagrammen sehr bequem.

Analyse des Phasengangs im Bode-Diagramm

Da $\underline{G}(s)$ und $\underline{H}(s)$ komplexe Funktionen sind, ergibt sich aus der Multiplikation automatisch eine Addition der Phasengänge, denn

$$e^{j\angle G} \cdot e^{j\angle H} = e^{j\angle G+H}$$

Beispiel zur Arbeit mit Bode-Diagrammen

Im Folgenden wird die Anwendung von Bode-Diagrammen an einem Beispiel gezeigt.

Mit solchen Aufgaben hat der Elektrotechnik-Student typischerweise in den ersten Semestern, beispielsweise im Fach Regelungstechnik, Nachrichtentechnik, Signaltheorie, o.ä. zu tun.

Gegeben ist also ein Übertragungssystem mit

$$F(s) = 100 \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{1}{s}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)}$$

also eine Serienschaltung

- eines P-Gliedes (100)
- eines I-Gliedes (1/s)
- eines PD-Gliedes (1+1/s) und
- eines PT1-Gliedes (1/(1+s/100))

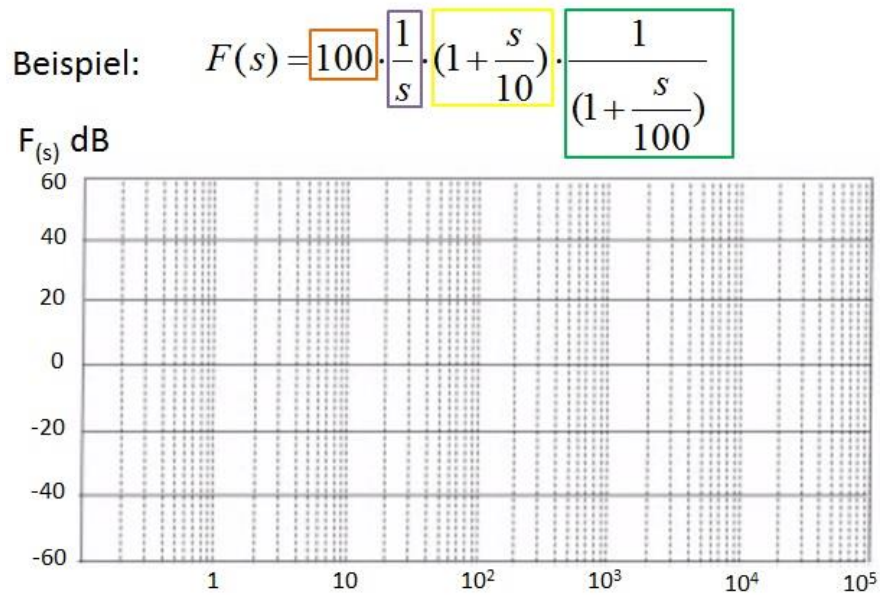
Anmerkung: Die ersten beiden Komponenten (P- und I-Glied können wie oben gezeigt von einem Integrierer stammen, dessen Grenzfrequenz bei 100 liegt).

An diesem Beispiel soll nun das prinzipielle Vorgehen gezeigt werden.

Ermittlung des Amplitudengangs

Im ersten Schritt wird aus den einzelnen Übertragungsfunktionen der Amplitudengang $F(s)$ des Gesamtsystems zusammengesetzt.

Hierzu benötigt man halblogarithmisches Papier, auf dem auf der x-Achse die Frequenz ω



logarithmisch dargestellt wird.

Auf der y-Achse werden die Frequenzgänge in dB eingetragen

Hierzu werden nun die einzelnen Frequenzgänge der Einzelglieder eingetragen und anschließend graphisch addiert.

Amplitudengang des P-Gliedes

Der Verstärkungsfaktor des P-Gliedes ist 100. In dB ausgedrückt bedeutet das:

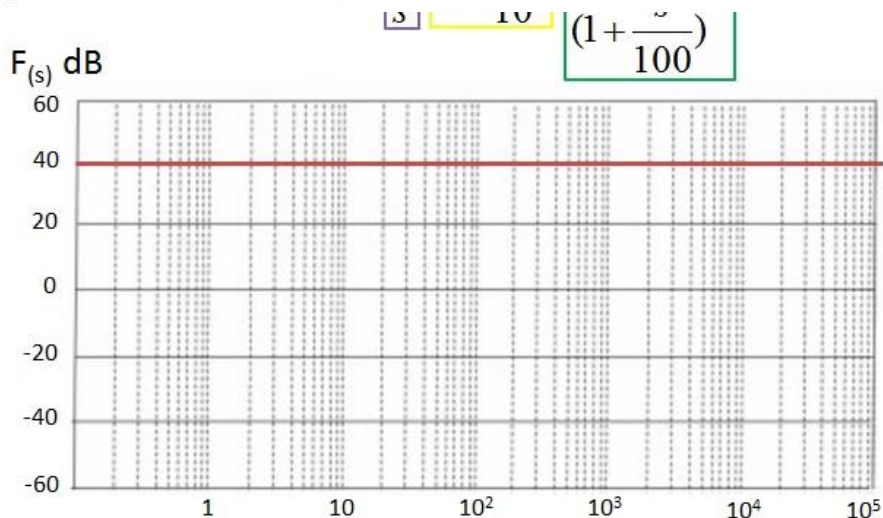
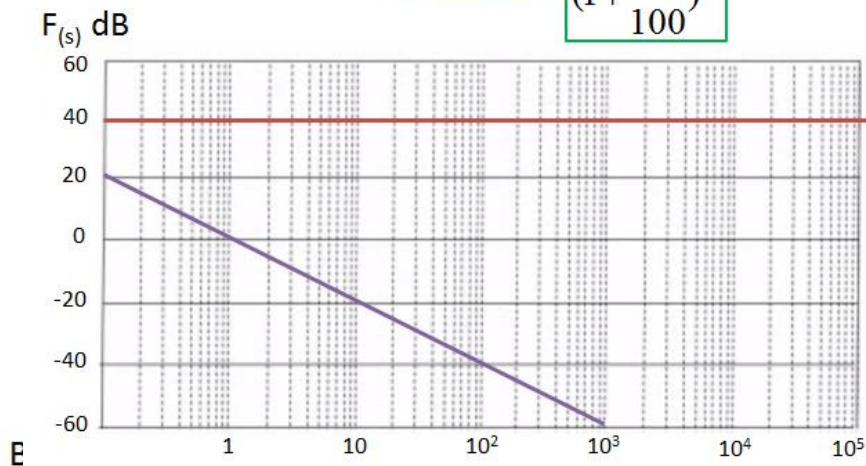
$$F_{(s)} | dB = 20 \cdot \log(100) = 40$$

Das P-Glied leistet damit einen Beitrag von konstant 40. Dies wird so in das Bode-Diagramm eingetragen.

Frequenzgang des I-Gliedes

Wie weiter oben gezeigt hat das I-Glied eine Verstärkung von 0dB bei $s=1$ und fällt um 20dB pro Dekade. Diese Gerade wird als nächstes in das Bode-Diagramm eingezeichnet.

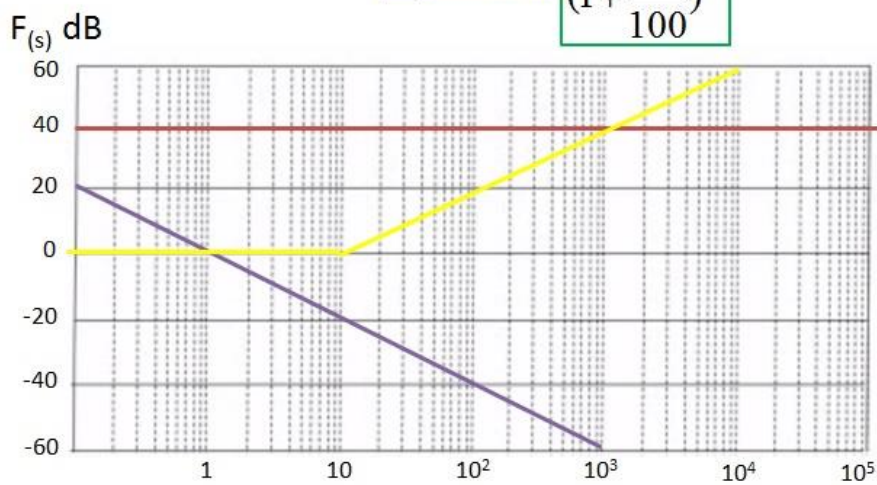
Beispiel: $F(s) = 100 \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{s}{10}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)}$



Frequenzgang des PD-Gliedes

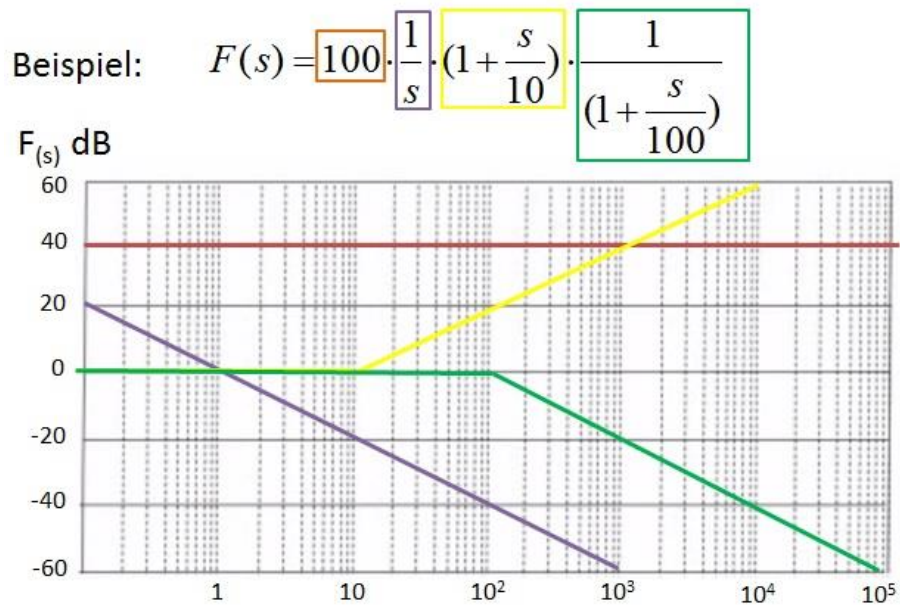
An der Übertragungsfunktion des PD-Gliedes erkennt man, dass die Verstärkung bis zur Frequenz $s=10$ (im Nenner steht die Zahl 10) konstant 0dB beträgt und anschließend mit 20dB pro Dekade ansteigt.

Beispiel: $F(s) = 100 \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(1 + \frac{s}{10}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{100}\right)}$



Frequenzgang des PT1-Gliedes

Das PT1-Glied sorgt für eine Verstärkung von 0dB bis $s=10^2$ (im Nenner steht die Zahl 100) und fällt anschließend mit 20dB pro Dekade.



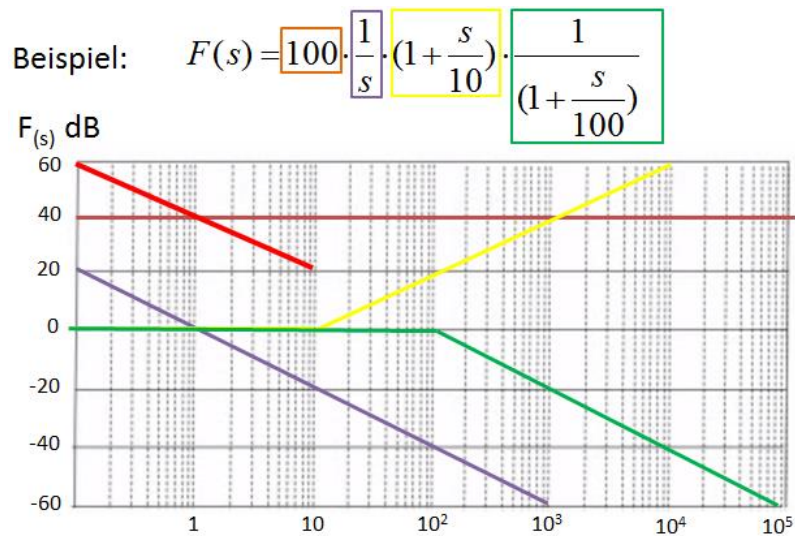
Graphische Addition der Frequenzgänge

Zur Ermittlung des Frequenzganges des Gesamtsystems werden nun die einzelnen Frequenzgänge graphisch addiert.

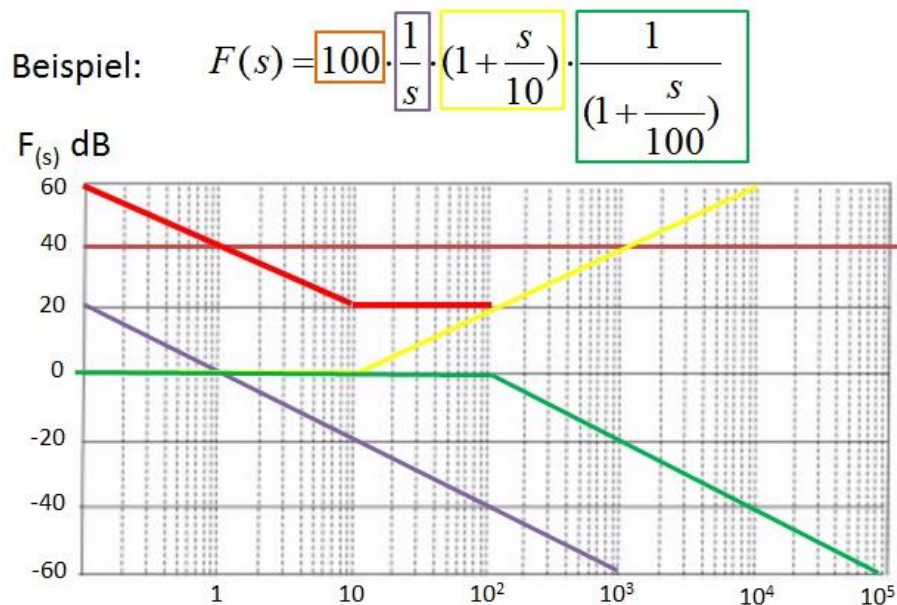
Zu Beginn der x-Achse ($s=0,1$) tragen das P-Glied (40dB) und das I-Glied (20dB) zu einer Verstärkung bei. Die Gesamtverstärkung beginnt also mit 60dB und fällt dann durch den Einfluss des I-Gliedes um 20dB pro Dekade.

Bis zur Frequenz $\omega=10$ liefern nur diese beiden Glieder einen Beitrag.

Es ergibt sich folgendes Bode-Diagramm (in Rot eingezeichnet):



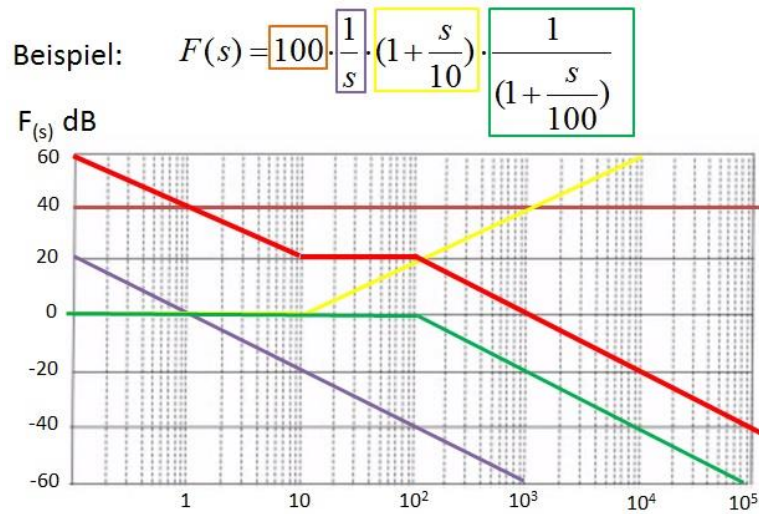
Ab $s=10$ sorgt das PD-Glied für einen zusätzlichen Anstieg von 20dB pro Dekade und kompensiert somit den Abstieg des I-Gliedes. Zwischen $s=10$ und $s=100$ ändert sich die Verstärkung somit nicht, wie in der folgenden Darstellung an der roten Linie zu erkennen ist.



Ab $s=100$ leistet nun das verbleibende PT1-Glied, das bis hierhin eine Verstärkung von 0dB hat, einen Beitrag von -20dB pro Dekade.

Der Amplitudengang des Gesamtsystems fällt also ab dieser Frequenz mit 20dB pro Dekade.

Für den Amplitudengang ergibt sich somit folgende Darstellung:



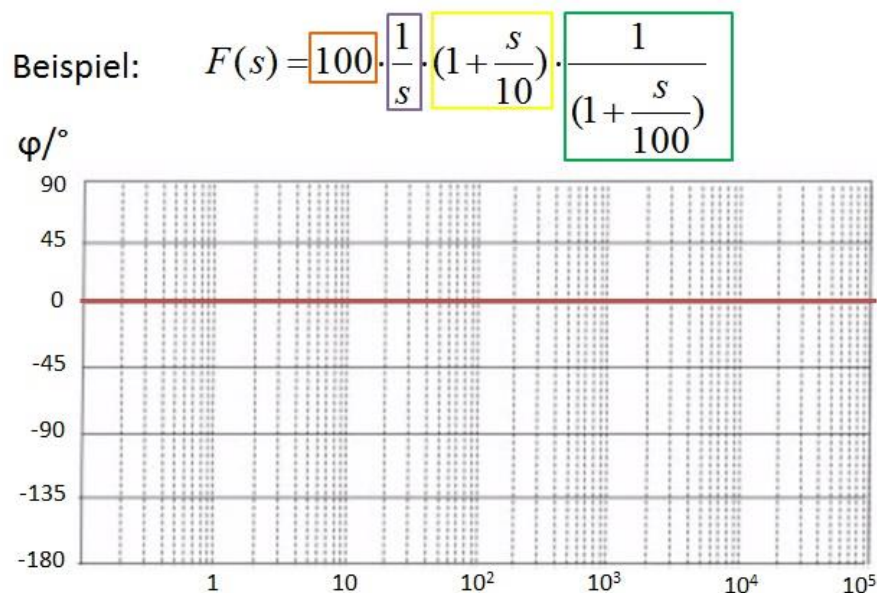
Ermittlung des Phasengangs

Für die Ermittlung des Frequenzgangs wird ähnlich vorgegangen.

Auf der y-Achse werden die Phasengänge der einzelnen Übertragungsglieder aufgetragen und anschließend addiert.

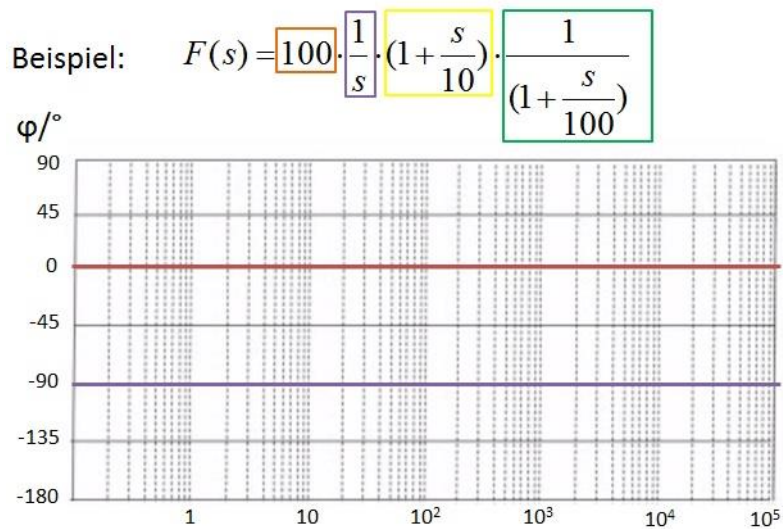
Phasengang des P-Gliedes

Der Phasengang des P-Gliedes ist konstant 0° .



Phasengang des I-Gliedes

Ein I-Glied hat einen Phasengang von konstant -90° . Auch dieser Phasengang wird eingetragen.



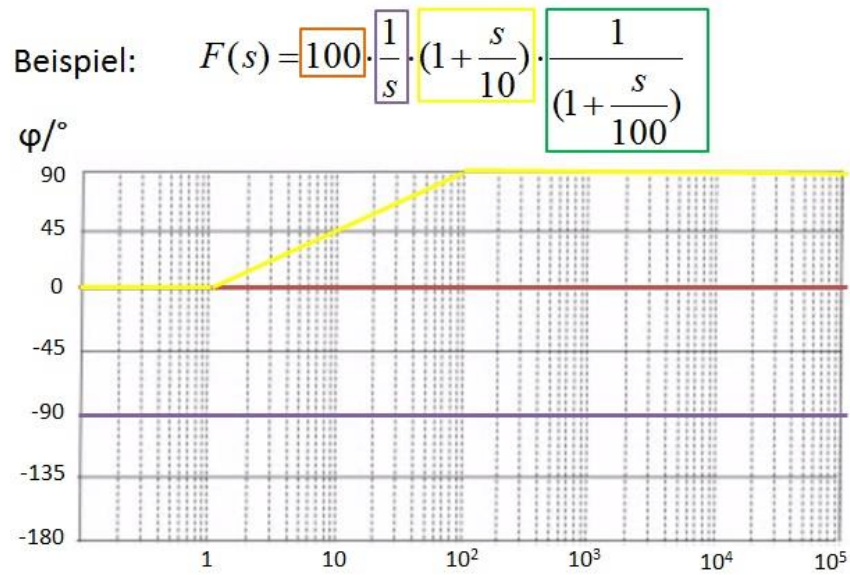
Phasengang des PD-Gliedes

Die Grenzfrequenz des PD-Gliedes liegt bei $s=10$. Bei dieser Frequenz beträgt der Phasengang $+45^\circ$. Eine Dekade vor der Grenzfrequenz, d.h. bei $s=1$ beträgt die Grenzfrequenz 0 , eine Dekade nach der Grenzfrequenz, d.h. bei $s=100$ beträgt die Grenzfrequenz $+90^\circ$.

Anders ausgedrückt:

Der Phasengang ist bis eine Dekade vor der Grenzfrequenz gleich 0 und steigt dann über zwei Dekaden auf $+90^\circ$. Im weiteren Verlauf, also ab einer Dekade nach der Grenzfrequenz bleibt der Phasengang auf konstant $+90^\circ$.

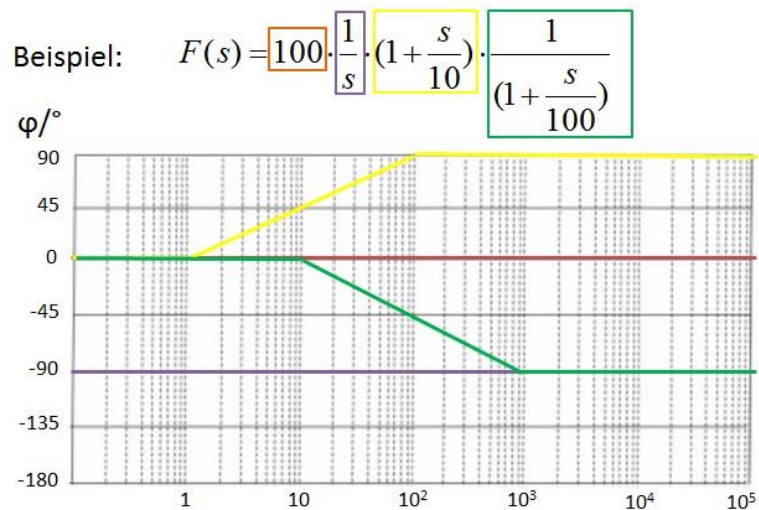
Der Phasengang des PD-Gliedes ist in der folgenden Darstellung an der gelben Linie zu erkennen.



Phasengang des PT1-Gliedes

Das letzte Glied, das PT1-Glied, hat eine Grenzfrequenz bei $s=100$. Bis eine Dekade vor der Grenzfrequenz, also bis $s=10$ beträgt der Phasengang 0° und fällt dann über 2 Dekaden, also bis $s=1000$ auf -90° .

Zusammenfassend ergibt sich also für die einzelnen Phasengänge folgendes Diagramm:

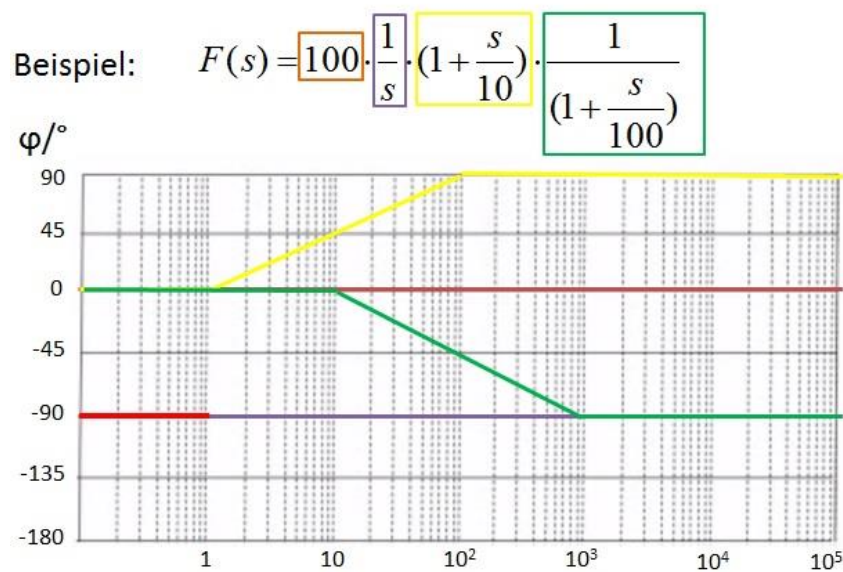


Graphische Addition der Phasengänge

Im letzten Schritt müssen nun die Phasengänge der einzelnen Übertragungsglieder wieder graphisch addiert werden.

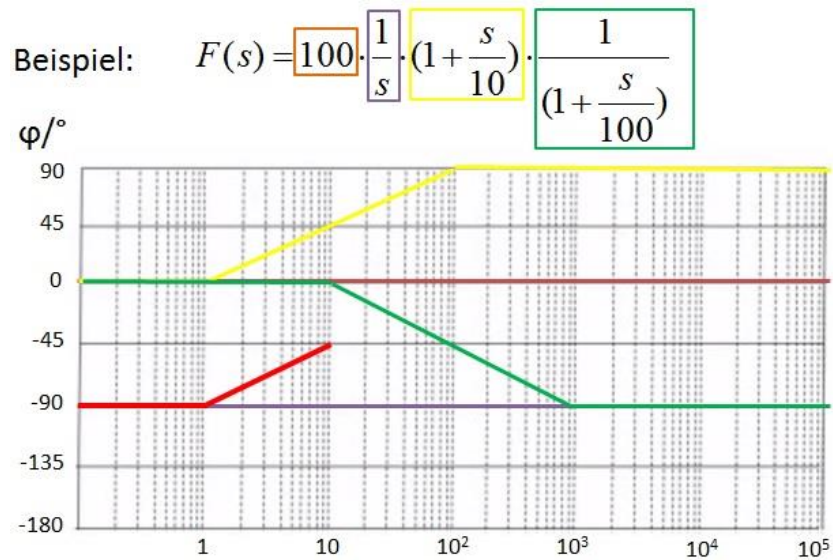
Zu Beginn hat lediglich das I-Glied einen Beitrag ungleich 0° .

Bis zu einer Frequenz $\omega=1$ ist demnach der Phasengang konstant -90°



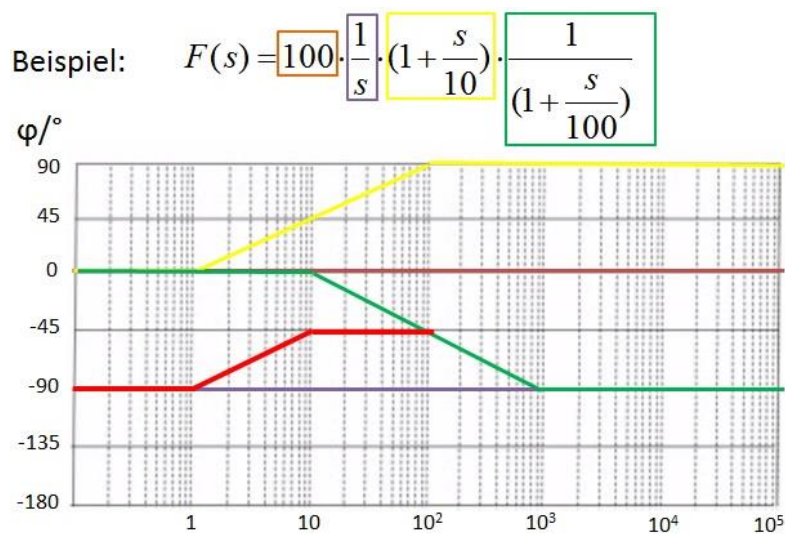
Ab der Frequenz $s=1$ muss nun der Einfluss des PD-Gliedes berücksichtigt werden. Der Phasen steigt ab dieser Frequenz um 45° pro Dekade, denn der Phasengang des PD-Gliedes steigt wie oben gezeigt über zwei Dekaden um 90° .

Da ab einer Frequenz $s=10$ das PT1-Glied ebenfalls einen Einfluss auf den gesamten Phasengang hat, kann der Phasengang zunächst nur bis $s=10$ gezeichnet werden.



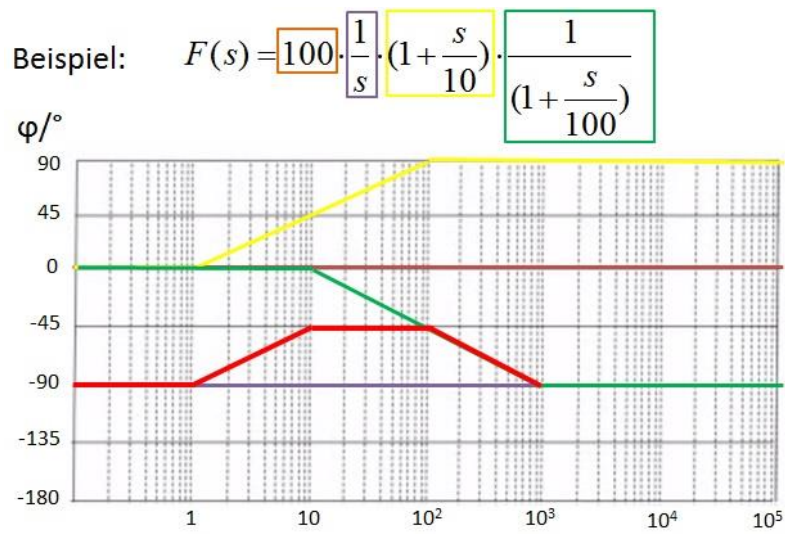
Ab $s=10$ fällt der Phasengang des PT1-Gliedes um 45° pro Dekade und hebt den Anstieg von 45° pro Dekade des PD-Gliedes auf. Zwischen $s=10$ und $s=100$ bleibt der Phasengang also konstant bei -45° .

Der Phasengang kann weiter gezeichnet werden bis $s=100$, denn dort tritt die nächste Änderung auf.

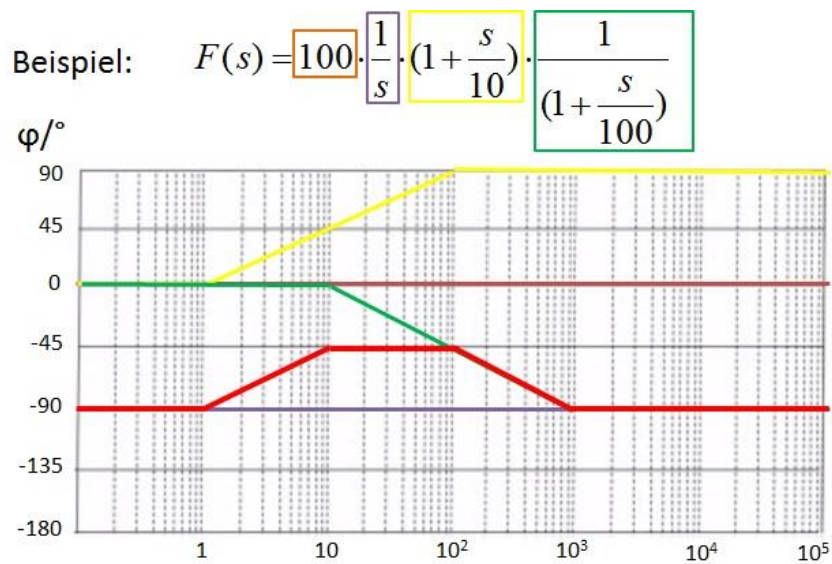


Ab $s=100$ bleibt der Phasengang des PD-Gliedes konstant. Die einzige Änderung stammt vom PT1-Glied, dessen Phasengang weiterhin um 45° pro Dekade fällt.

Bis zur nächsten Änderung bei $s=1000$ fällt der Phasengang des Gesamtsystems also um 45° pro Dekade.



Bei einer Frequenz $s=1000$ endet auch der Abfall des PT1-Gliedes. Der Phasengang für das Gesamtsystem beträgt für Frequenzen oberhalb $s=1000$ konstant -90° .



In [folgendem Video](#) erläutere ich die Vorgehensweise noch einmal Schritt für Schritt.



Übungsaufgabe zum Bode-Diagramm

Zum Abschluss des Buches gibt es nun noch eine Übungsaufgabe.

Für folgende Übertragungsfunktion soll das Bode-Diagramm erstellt werden.

$$F(s) = 10 \cdot s \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{4}\right)} \left(1 + \frac{s}{60}\right)$$

Logarithmisches Papier habe ich unter diesem Link bereitgestellt.

Auch zu dieser Aufgabe gibt es hier [ein Lösungsvideo](#).

